

Graficación animada

Juan Félix Ávila Herrera
javila@una.ac.cr

Escuela de Informática Universidad Nacional

Resumen

Este trabajo presenta una colección de ejemplos, de dificultad ascendente, que muestran (principalmente) las bondades del software comercial Graphing Calculator (GC). El trabajo es fruto del empleo de esta herramienta, por parte del autor, en cursos tales como cálculo en varias variables e investigación de operaciones. Las herramientas digitales GC y MATHEMATICA han sido fundamentales para apoyar tecnológicamente estos cursos y este tipo de productos abren las puertas de un nuevo escenario en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1 Introducción

Es claro que la computadora es día con día una herramienta que apoya nuestro diario quehacer. El proceso educativo no escapa a esta realidad y se debe considerar seriamente la necesidad de incorporar esta herramienta en muchas de las disciplinas que se imparten en los centros educativos costarricenses. Las matemáticas no son ajenas a esta situación y hoy día se cuenta con la oferta de muchos productos informáticos que están dando la posibilidad de abordar muchas ramas de esta disciplina desde una perspectiva diferente y atractiva. Entre algunos paquetes informáticos que se han destacado en este proceso, podemos mencionar Mathematica, Maple, MuPad, Geometer Sketch Pad y por supuesto Graphing Calculator del que nos ocuparemos en este trabajo.

2 ¿Qué es Graphing Calculator?

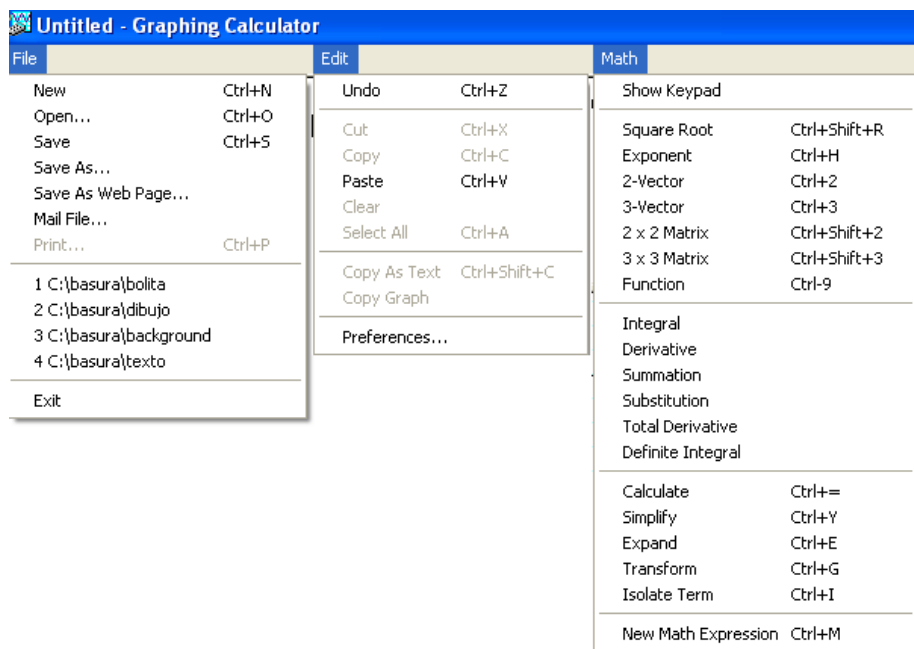
GC es un software comercial que permite visualizar objetos matemáticos en dos, tres y cuatro dimensiones. Se pueden crear gráficas animadas, resolver ecuaciones gráficamente y escoger la perspectiva de observación entre otras cosas. GC permite graficar funciones y relaciones ya sean éstas implícitas, explícitas o bien parametrizadas, tanto en dos como en tres dimensiones.

Uno de los aspectos más llamativos de este software es la simplicidad con la que se introducen los datos. En el caso de funciones en dos o tres variables, no es necesario despejar ninguna de ellas en particular. La ecuación se introduce tal como está.

GC se encuentra disponible en la dirección www.PacificT.com y hay una versión de aproximadamente 3 megas para Windows (llamada gcViewer) que se puede descargar gratuitamente desde este sitio. Dicha versión no es 100% funcional pero permite visualizar algunos ejemplos que trae consigo o bien archivos desarrollados previamente por alguien que posea una licencia. Realmente vale la pena descargar esta versión y disfrutar en poco tiempo de una herramienta que es, a juicio del autor, virtualmente una joya digital.

3 Ejemplos usando graphing calculator

En esta sección se presenta una colección de ejemplos de dificultad ascendente que permiten apreciar las facilidades del GC. En la siguiente figura se muestra los primeros tres menús de GC:



Nota: En la colección de ejemplos, el código en GC se ha acomodado, en algunos casos, en una forma algo diferente de la que luce en este programa. Este se hace para economizar espacio.

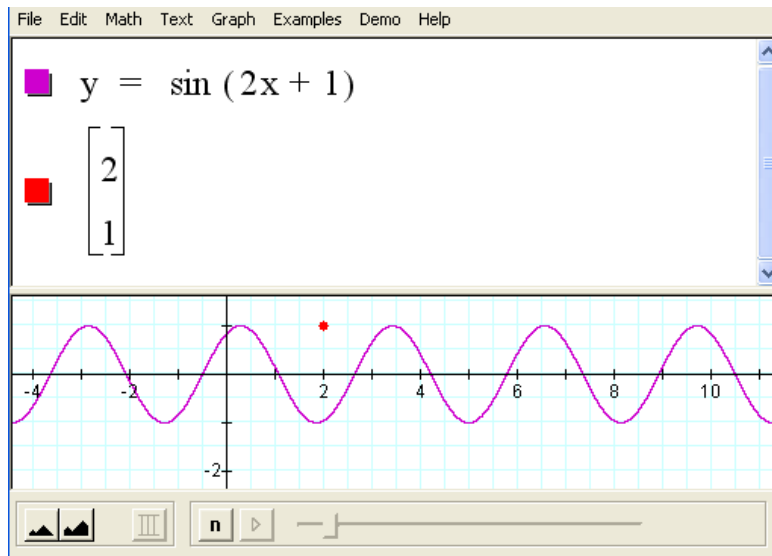
EJEMPLO 1 GC puede usarse como calculadora. Calcule una aproximación decimal para la expresión $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1$.

Se puede usar el botón de raíz cuadrada del “keypad” para facilitar el cálculo.

■ $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1 = 13.124356$
 Curve is outside the region shown

En GC puede ingresar una ecuación sencilla para ser graficada.

EJEMPLO 2 Para graficar $y = \sin(2x + 1)$ se escribe la ecuación tal cual cambiando sen por sin. Si se desea marcar el punto $(2, 1)$ se emplea entonces un 2-vector que se localiza en el menú Math. El resultado es el siguiente.



EJEMPLO 3 Dibujar en forma conjunta la gráfica de $y = \sin(2x + 1)$ y la de $y = \cos(2x - 1)$.
 Para agregar una nueva expresión matemática usamos el comando Ctrl-M. El resultado es como sigue:

- $y = \sin(2x + 1)$
- $y = \cos(2x - 1)$

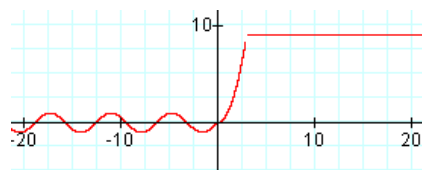
EJEMPLO 4 Dibujar

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Desafortunadamente a pesar de que en la versión que se empleó supuestamente posee los símbolos \leq y \geq estos nunca aparecieron. Para efectos gráficos esto significa que se habrá un par de agujeros en los puntos de conexión. Para el caso de figuras bidimensionales o tridimensionales la situación se subsana graficando por separado la región deseada (usando desigualdades) y luego el borde (usando ecuaciones). Normalmente esto no representa un gran problema, pero si debe mantenerse alerta sobre esta deficiencia.

El código es el siguiente:

- $y = \sin x, x < 0$
- $y = x^2, x > 0, x < 3$
- $y = 9, x > 3$

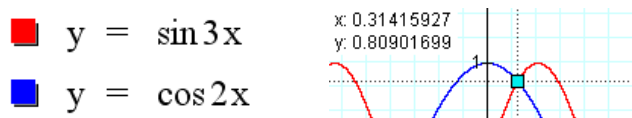


GC puede usarse para resolver ecuaciones gráficamente.

EJEMPLO 5 Halle un par de soluciones para la ecuación $\sin 3x = \cos 2x$.

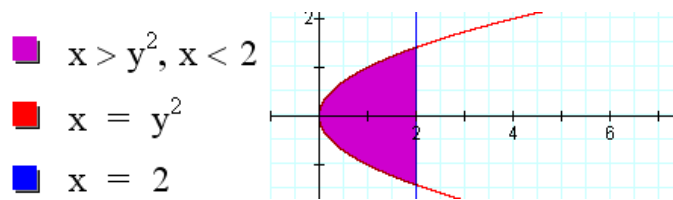
Para logra esto graficamos

Usando el *mouse* podemos ubicar las intersecciones de estas curvas y observar aproximaciones numéricas de ellas. Adicionalmente, si se cuenta con sonido en la computadora, puede escucharse un ruido al atravesar una de estas intersecciones.



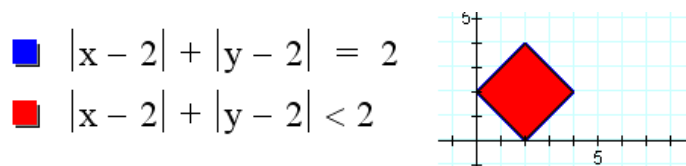
EJEMPLO 6 GC puede graficar desigualdades. Grafique la región encerrada por $x = y^2$ y la recta $x = 2$.

El código en GC es como sigue:



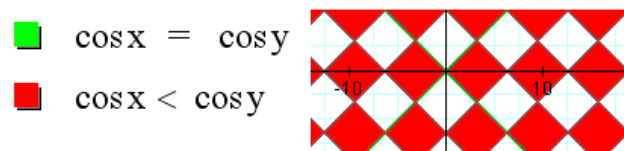
EJEMPLO 7 Graficar el rombo dado por $|x - 2| + |y - 2| \leq 2$.

En este caso graficamos el interior y el borde por separado. El código en GC es como sigue:

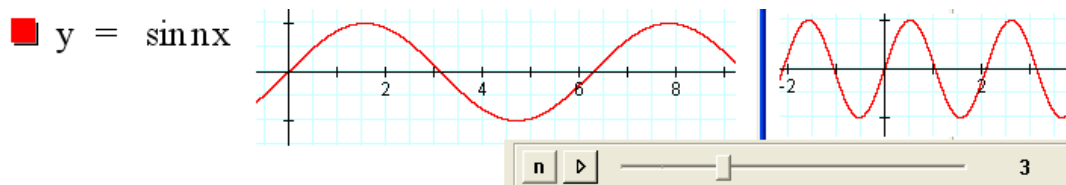


EJEMPLO 8 Graficar la región determinada por $\cos x \leq \cos y$.

En este caso obtenemos una bandera a cuadros de bordes verdes. Simplemente escribimos:



EJEMPLO 9 Uno de los aspectos más interesantes de GC es la animación. Graficar $y = \sin nx$. El código es el siguiente:

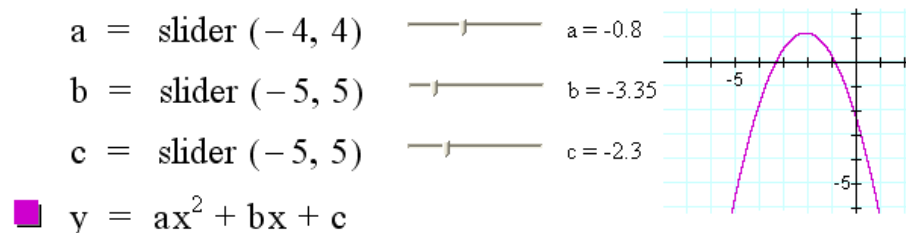


Utilice la barra *scroll* que se halla en la base de GC para manipular la animación. Si hace click sobre el botón ubicado al lado derecho de n conseguirá que la gráfica se mueva en forma automática. Para controlar el rango de n y la velocidad de la animación se debe hacer click sobre el botón n .

EJEMPLO 10 Graficar la parábola $y = ax^2 + bx + c$ para $-4 \leq a \leq 4$, $-5 \leq b \leq 5$ y $-5 \leq c \leq 5$.

Para esto debemos emplear los deslizadores o “sliders”. Indique el nombre del deslizador y su rango. Moviendo el botón de cada deslizador se nota inmediatamente el papel de cada coeficiente en esta función cuadrática.

El código en GC es el siguiente:

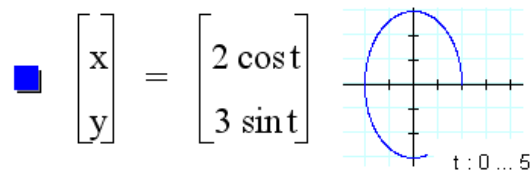


EJEMPLO 11 Graficar la curva paramétrica:

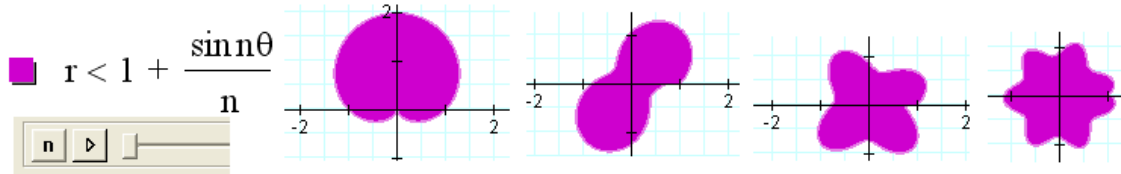
$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 5$$

Se debe observar que al pasar a coordenadas cartesianas obtenemos $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Se trata de una elipse. Sin embargo como el parámetro oscila entre 0 y 5, se dibuja solo parte de dicha elipse.

Para construir los vectores usamos la opción 2-vector de menú *Math*. El código en GC es el siguiente:



EJEMPLO 12 Realizar la gráfica en coordenadas polares de $r < 1 + \frac{\text{sen}(n\theta)}{n}$ para n variando entre 1 y 10. El código en GC para graficar esto es:

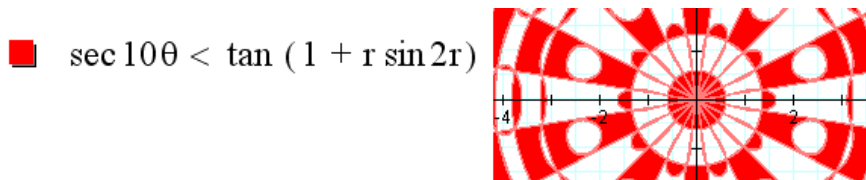


El rango de n y la velocidad de la animación se define en la barra en la base de la ventana de GC conocida como *Drag Slider*.

En coordenadas polares se pueden crear diseños llamativos. Considere el siguiente caso.

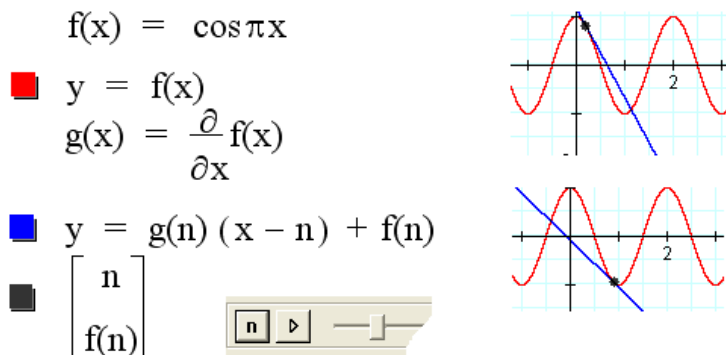
EJEMPLO 13 Realizar la gráfica de $\sec(10\theta) < \tan(1 + r \text{sen}(2r))$.

El código en GC es muy simple:



EJEMPLO 14 Trace una recta tangente “movil” sobre la curva de la función $f(x) = \cos(\pi x)$ en el punto $(n, f(n))$ haciendo variar n .

Empezamos declarando la función en cuestión usando la opción *function* del menú *Math*. De esta forma el código puede ser aprovechado para otra función diferente. Seguidamente graficamos la función, escribiendo $y = f(x)$. Luego declaramos (usando las opciones “function” y “derivative”) la función $g(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$. Sabemos que para el punto $(n, f(n))$, la recta tangente tiene ecuación $y = f'(n)(x - n) + f(n)$, o bien $y = g(n)(x - n) + f(n)$. Graficamos entonces (usando “function”) esta recta: Finalmente trazamos el punto de tangencia mediante la opción 2-vector. El código completo en GC es:



EJEMPLO 15 Resolver gráficamente el siguiente programa lineal

$$\text{Maximizar } z = 3x + 2y$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6, \\ 2x + y \leq 8, \\ -x + y \leq 1, \\ y \leq 2, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Debemos recordar que la región de factibilidad de un programa lineal de este tipo corresponde a un polígono. En este caso tenemos una pequeña dificultad a la hora de emplear GC y es la aparición del símbolo \leq . Como se sabe, la diferencia al emplear $<$ o \leq estriba en si se excluye o no la arista asociada a desigualdad en cuestión. Usamos GC para graficar la región de factibilidad excluyendo la frontera del polígono resultante, reemplazando \leq por $<$. No obstante debemos tener siempre en mente que los vértices del polígono que se observan son puntos factibles del programa lineal.

El código en GC para dibujar el polígono es:


■ $x + 2y < 6, 2x + y < 8, -x + y < 1, y < 2, x > 0, y > 0$

Nos queda ahora dibujar la función objetivo. Para esto declaramos un deslizador tal como sigue $k = \text{slider}([0, 20])$; Procedemos entonces a graficar la recta asociada a la función objetivo, a saber $3 \cdot x + 2 \cdot y = k$. Si hacemos variar el deslizador k notamos que “abandona” el polígono en el vértice con coordenadas (aproximadas) (3.3, 1.3). Además se debe observar que esto se produce cuando el valor de k (que corresponde a z) es aproximadamente 12.7. Usando el botón de ampliación de GC podríamos obtener una mejor aproximación para estos valores.

Solo una cosa más antes de pasar a otro ejemplo. Es probable que el lector se pregunte por qué no declaramos z como el valor para el deslizador y graficar así $3x + 2y = z$ en lugar de $3x + 2y = k$. El problema es que GC grafica en tres dimensiones cuando nota la presencia de la variable z y en tal caso graficaría el plano $3x + 2y = z$ que no es lo que pretendemos observar.

El código total del problema es:

■ $x + 2y < 6, 2x + y < 8, -x + y < 1, y < 2, x > 0, y > 0$

$k = \text{slider} (0, 20)$  $k = 12.5$

■ $3x + 2y = k$



EJEMPLO 16 Con algo de esfuerzo y usando Mathematica (ver Fig. 1) se puede deducir una fórmula para hallar la ecuación del círculo osculador para una curva parametrizada como

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

cuando $t = m$. Para ello, y por simplicidad, hacemos algunas designaciones antes:

```

r[t_] = Simplify[{f[t], g[t]}, f[t] ∈ Reals ∧ g[t] ∈ Reals]
"Punto sobre el cual se desea calcular el círculo osculador"
s = r[p]
TT[t_] = Simplify[ $\frac{r'[t]}{\text{Norm}[r'[t] ]}$ , t ∈ Reals] //.
Abs[y : _] ^ 2 → y ^ 2
NN[t_] = Simplify[ $\frac{TT'[t]}{\sqrt{TT'[t] \cdot TT'[t]}}$ , t ∈ Reals] //.
Abs[y : _] ^ 2 → y ^ 2
κ =
Simplify[
(∂t r[t] [[1]] ∂t,t r[t] [[2]] - ∂t,t r[t] [[1]] ∂t r[t] [[2]]) /
Norm[∂t r[t]]3, t ∈ Reals] //. {t → p, Abs[y : _] ^ 2 → y ^ 2};
"Radio del círculo de curvatura:"
ρ =  $\frac{1}{\kappa}$ 
"Círculo:"
MC = Simplify[Norm[{x, y} - (s + ρ NN[t0])] ^ 2,
x ∈ Reals ∧ y ∈ Reals] //. Abs[y : _] ^ 2 → y ^ 2;
MC1 = MC //. {g'[p] f''[p] - f'[p] g''[p] → α, f'[p]2 + g'[p]2 → β,
-g'[p] f''[p] + f'[p] g''[p] → -α};
MC2 = ρ ^ 2 //. {g'[p] f''[p] - f'[p] g''[p] → α, f'[p]2 + g'[p]2 → β,
-g'[p] f''[p] + f'[p] g''[p] → -α};
"Simplificando"
MC1 == MC2

```

Figura 1: Código en Mathematica para ecuación del círculo osculador.

$$* j = f'(m) g''(m) - g'(m) f''(m).$$

$$* k = f'(m)^2 + g'(m)^2$$

La ecuación del círculo osculador es:

$$\left(y - g(m) - \frac{k f'(m)}{|j|}\right)^2 + \left(x - f(m) + \frac{k g'(m)}{|j|}\right)^2 = \frac{k^3}{j^2}$$

Nota: Hasta donde se investigó, esta fórmula no figura en los libros tradiciones de cálculo en varias variables.

Consideremos el caso de la parábola $y = x^2$ que se puede describir paramétricamente como $x = t$, $y = t^2$, con $t \in \mathbb{R}$. Si se quiere elegir “cualquier” punto de la curva, empleamos como deslizador el valor m . Hacemos además $f(t) = t$ y $g(t) = t^2$ y luego dibujamos dicha curva. El código en GC es:

$m = \text{slider}(-20, 20) \longrightarrow m = 2.2$

$$f(t) = t$$

$$g(t) = -t^2$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

Definimos seguidamente algunas funciones auxiliares para primeras derivadas de f y g , respectivamente:

$$\begin{array}{l|l} a(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) & c(x) = \frac{\partial}{\partial x} g(x) \\ b(x) = \frac{\partial}{\partial x} a(x) & d(x) = \frac{\partial}{\partial x} c(x) \end{array}$$

Seguidamente declaramos los valores adicionales j y k y finalmente dibujamos el círculo osculador:

$$j = a(m)d(m) - c(m)b(m)$$

$$k = a(m)^2 + c(m)^2$$



$$\blacksquare \frac{k^3}{j^2} = \left(y - g(m) - \frac{ka(m)}{|j|} \right)^2 + \left(x - f(m) + \frac{kc(m)}{|j|} \right)^2$$

GC permite también otro nivel de interacción cuando se trabaja con números complejos, es decir del tipo $z = a + bi$ con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$. Como se sabe, se puede establecer una identificación entre un número complejo $z = a + bi$ y un punto en el plano cartesiano (a, b) . Cuando se declara uno de tales puntos, GC permite cambiar, mediante el mouse, su ubicación y recalculan las coordenadas del punto en cuestión.

EJEMPLO 17 Considere el punto $(1, 0)$. Elabore una gráfica animada que haga rotar este punto alrededor del origen. Dibuje además el segmento que une los puntos $p = 1 + i$ y $q = -1 - i$.

Como se sabe el punto $(1, 0)$ puede identificarse con $\cos t + i \sin t$ cuando $t = 0$, o bien (en forma exponencial) con e^{it} , cuando $t = 0$. Si hacemos variar t entre 0 y 2π , obtendremos la gráfica del círculo. De esta forma la ecuación para el círculo es $z = e^{it}$. Por otro lado si adicionamos la ecuación $z = e^{in}$ logramos hacer la animación que muestra el punto $(1, 0)$ rotando alrededor del origen. Seguidamente declaramos los puntos $p = 1 + i$ y $q = -1 - i$. La ecuación del segmento de recta que une p con q es $z = (q - p)t + p$. Sin embargo, en virtud de que habíamos indicado que el parámetro t variaría entre 0 y 2π , tenemos una buena razón para introducir la función módulo. El código completo en GC es:

■ $z = e^{2\pi it}$ ■ $q = 1 + i$
■ $z = e^{2\pi in}$ ■ $p = -1 - i$
■ $z = (q - p) \bmod (t, 1) + p$

Al mover el punto q con el “mouse”, se debe advertir el cambio de coordenadas en forma instantánea.

EJEMPLO 18 Elaborar una animación, en el sistema primal, que muestre la función $y = |x|$ rotando alrededor del origen.

La transformación de coordenadas $z' = a \cdot z$ con $a = e^{in}$ efectúa una rotación para cada elección de n . El código en GC es como sigue:

■ $z' = az$
 $a = \cos n + i \sin n$

■ $y = |x|$

EJEMPLO 19 Trazar un vector normal a la curva $y = \sum_{k=1}^5 \sin^k x$ calculando la derivada para hallar la pendiente de la tangente en $x = n$.

Si tenemos una curva de la forma $y = f(x)$, esta se puede parametrizar como $r(t) = \langle t, f(t) \rangle$. Designemos con $A = (n, f(n))$ un punto arbitrario sobre la curva en el que se desea dibujar el vector normal. Sabemos entonces que $r'(t) = \langle 1, f'(t) \rangle$ y por lo tanto el vector tangente está dado por

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{\langle 1, f'(t) \rangle}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}$$

El vector normal $N(t)$ es ortogonal a $T(t)$ y para este caso (observando la concavidad de la curva en cuestión) puede ponerse como

$$N(t) = \frac{\langle -f'(t), 1 \rangle}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}$$

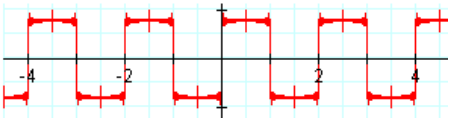
Para dibujar el vector normal en GC indicamos el punto en el que este empieza y el punto en el que termina. El código GC para este problema es:

■ $f(x) = \sum_{k=1}^5 \sin^k x$
■ $y = f(x)$
 $g(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$

■ $\begin{bmatrix} n \\ f(n) \end{bmatrix}$

■ $\begin{bmatrix} n \\ f(n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ f(n) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1 + g(n)^2}} \begin{bmatrix} -g(n) \\ 1 \end{bmatrix}$

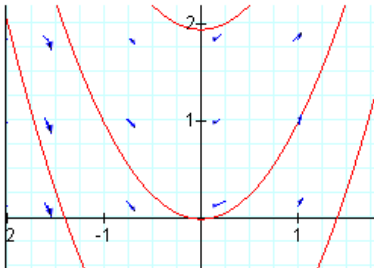
Nota: La sumatoria se ingresa mediante la opción *Summation* del menú *Math*. Podemos entonces construir aproximaciones a ondas cuadradas como por ejemplo:

$$\blacksquare y = \sum_{k=0}^{20} \frac{\sin \pi (2k + 1) x}{2k + 1}$$


EJEMPLO 20 Trazar algunas soluciones de la ecuación diferencial $y' = 2x$ y sus isoclinas.

Usando el método de separación de variables para ecuaciones diferenciales es fácil ver que la solución general de esta es $y = x^2 + k$. Usando el comando *Total derivative* del menú *Math* escribimos el código $\frac{dy}{dx}$. Seguidamente indicamos el campo vectorial correspondiente que muestra las isoclinas de esta ecuación.

$$\blacksquare \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix}$$


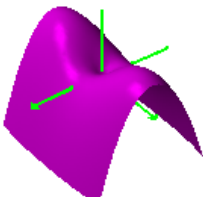
Nota: No se debe tratar de construir la expresión $\frac{dy}{dx}$ como si se tratase de una división. Debe emplearse el comando *Total derivative*.

EJEMPLO 21 Graficar $x^2 + z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Se trata de una superficie tridimensional. GC elabora la grafica escogiendo un rango para los ejes coordenados y el punto de vista, sin embargo se puede variar esto y mover la superficie para observarla desde otro punto. De hecho se puede dejar girando dependiendo de la velocidad utilizada en el "mouse".

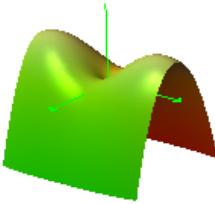
El código GC es el siguiente:

$$\blacksquare x^2 + z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{array}{l} x: -2 \dots 2 \\ y: -2 \dots 2 \\ z: -2 \dots 2 \end{array}$$


Nota: El eje z es aquel que no posee un flecha en su extremo. Una vez ubicado este, el eje x es el de la izquierda y el eje y , el de la derecha.

Si se desea dar una coloración diferente, se puede usar el vector **rgb** (red, green, blue) como sigue:

$$\blacksquare \quad \mathbf{x}^2 + z = \sin \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mathbf{x} \\ 1 + \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix}$$


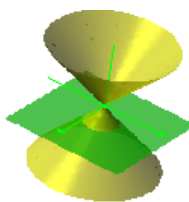
Como se nota, cada punto es una función de x , y y z . También se puede especificar el color usando el vector **hsv**.

EJEMPLO 22 Graficar conjuntamente el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = k$ para $-2 \leq k \leq 5$. Utilizar transparencia.

Como se sabe $z = k$ es un plano paralelo al plano xy que podemos mover creando un “slider” para k con el rango que se especifica. En el menú *Graph* está la opción de usar transparencia para lograr ver a través de los objetos tridimensionales. El código GC es el siguiente:

$$k = \text{slider}(-2, 5) \quad \text{---} \quad k = -1.09$$

$$\blacksquare \quad z^2 = x^2 + y^2$$

$$\blacksquare \quad |z| = k$$


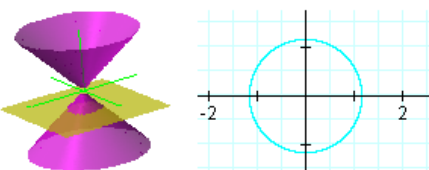
EJEMPLO 23 Para el problema anterior muestre en un sistema coordenado yuxtapuesto la proyección de la curva que se obtiene al cortar el cono con el plano $z = k$.

El código GC es el siguiente:

$$k = \text{slider}(-2, 5) \quad \text{---} \quad k = -1.16$$

$$\blacksquare \quad z^2 = x^2 + y^2$$

$$\blacksquare \quad z = k$$

$$\blacksquare \quad k^2 = x'^2 + y'^2$$


Observe que además de la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ se agrega $k^2 = x'^2 + y'^2$. Para cada valor de k esta última ecuación describe la que se forma al cortar el cono con el plano $z = k$. Se trata de un círculo de radio k . Cuando se desee un sistema yuxtapuesto, se hace uso del sistema primal (usando la variable x' y la variable y').

EJEMPLO 24 Graficar la curva paramétrica:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t^3 \end{cases} \quad \text{con} \quad -5 \leq t \leq 5$$

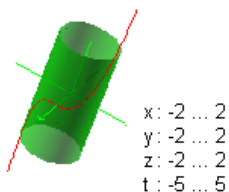
conjuntamente con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Se trata de una curva tridimensional. Como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, la curva se halla dentro del cilindro y la coordenada $z = t^3$ hace que se prolongue a lo largo de dicho cilindro. Para construir los vectores usamos la opción 3-vector de menú *Math*.

El código GC es el siguiente:

■ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t^3 \end{bmatrix}$

■ $x^2 + y^2 = 1$



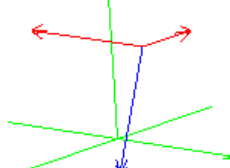
EJEMPLO 25 Considere los siguientes puntos en \mathbb{R}^3 : $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, -2, 3)$ y $C = (-1, 2, 3)$.

Trazar el vector que va de A a B , el que va de A a C y el que va de A a $\frac{(B - A) \times (C - A)}{\| (B - A) \times (C - A) \|}$.

Usamos la opción 3- vector del menú *Math*. El código en GC es:

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$
 $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

■ A, B
■ A, C
■ A, $\frac{B - A \times C - A}{|B - A \times C - A|}$

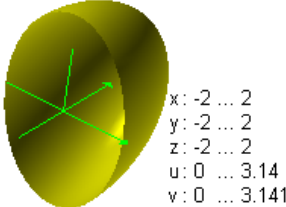


EJEMPLO 26 Usar coordenadas esféricas para graficar el “lado derecho” del paraboloides cuya ecuación está dado por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$.

La parametrización en coordenadas esféricas para este caso puede escribirse como:

$$\begin{cases} x = 2 \sin u \cos v \\ y = 4 \sin u \sin v \\ z = 3 \cos u \end{cases} \quad \text{con} \quad 0 \leq u, v \leq \pi.$$

El código es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin u \cdot \cos v \\ 4 \sin u \cdot \sin v \\ 3 \cos u \end{bmatrix}$$


EJEMPLO 27 Graficar el plano tangente al elipsoide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ en el punto $(2, 1, \sqrt{6})$.

Expresamos primero la ecuación de la superficie en la forma $f(x, y, z) = 0$ definiendo

$$f(x, y, z) = \frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 - 12 = 0.$$

Empezamos entonces declarando la función f usando la opción *function* del menú *Math*. Observamos que las derivadas parciales de f son $f_x(x, y, z) = \frac{3x}{2}$, $f_y(x, y, z) = 6y$, $f_z(x, y, z) = 2z$, y por lo tanto en $(2, 1, \sqrt{6})$,

$$f_x(2, 1, \sqrt{6}) = 3, \quad f_y(2, 1, \sqrt{6}) = 6, \quad f_z(2, 1, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

Para lograr esto en GC definimos algunas funciones auxiliares (usando las opciones “function” y “derivative” del menú *Math*), a saber:

$$g(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) \quad h(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) \quad k(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$$

Seguidamente indicamos el punto de tangencia mediante los valores a , b y c como sigue:

$$a = 2 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{6}$$

Se debe observar que si se cambia de punto de tangencia, simplemente se hace la modificación de este código. Para este problema, la ecuación es:

$$3(x - 2) + 6(y - 1) + 2\sqrt{6}(z - \sqrt{6}) = 0$$

En GC podemos escribir esto como:

$$g(a, b, c)(x - a) + h(a, b, c)(y - b) + k(a, b, c)(z - c) = 0$$

Para graficar el elipsoide simplemente agregamos el código $0 = f(x, y, z)$: El código completo es como sigue:

$$f(x, y, z) = \frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 - 12$$

$$g(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$$

$$h(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)$$

$$k(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$$

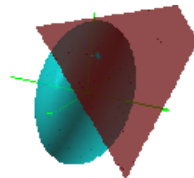
$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$c = \sqrt{6}$$

$$g(a, b, c)(x - a) + h(a, b, c)(y - b) + k(a, b, c)(z - c) = 0$$

$$0 = f(x, y, z)$$



EJEMPLO 28 Graficar el plano tangente al elipsoide del ejemplo anterior $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ en “cualquier” punto.

Para lograr esto podemos parametrizar un punto arbitrario del elipsoide y emplear sus parámetros como deslizadores. Utilizando coordenadas esféricas, hacemos:

$$a = 4 \cos(p) \operatorname{sen}(q), \quad b = 2 \operatorname{sen}(p) \operatorname{sen}(q), \quad c = \sqrt{12} \cos(q)$$

Declaramos entonces p y q como deslizadores:

$$p = \operatorname{slider}(0, 6.28); \quad q = \operatorname{slider}(0, 3.14);$$

El código completo es entonces: El problema también se puede abordar empleando la fórmula del plano tangente para superficies parametrizadas. Se deja esto como ejercicio.

EJEMPLO 29 Hallar la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $y = x^2$ alrededor del eje x . Grafique dicha superficie y elabore una animación que muestre esta curva girando alrededor del eje x .

Como se sabe para hallar la ecuación de una superficie revolución, que se obtiene al hacer rotar una curva con ecuación $F(x, y) = 0$ alrededor del eje x , se debe reemplazar la variable y por la expresión $\sqrt{y^2 + z^2}$. Obtenemos así que la superficie buscada tiene ecuación $\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$. Para confeccionar la animación de la curva $y = x^2$ rotando alrededor del eje x usamos la parametrización

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Nota: No podemos emplear la forma cartesiana $y = x^2$ para esta animación pues una ecuación del tipo $y = f(x)$ se dibuja como un cilindro cuando estamos en trabajando en 3D.

Para hacer rotar la curva en cuestión empleamos la matriz de rotación


$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi n) & \operatorname{sen}(\pi n) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\pi n) & \cos(\pi n) \end{bmatrix}$$

Para ingresar esta matriz en GC hacemos uso de la opción 3×3 *Matrix* de *Math*. Solo falta graficar la curva paramétrica y hacer variar el parámetro n . Es bueno ajustar el número de pasos en 50 o menos para apreciar las revoluciones de la curva. El código en GC es:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi n & \operatorname{sen} \pi n \\ 0 & -\operatorname{sen} \pi n & \cos \pi n \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \blacksquare \sqrt{y^2 + z^2} = x^2 \\ \blacksquare \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \img alt="3D plot of a surface of revolution" data-bbox="515 800 604 865"/>$$

Para terminar es bueno mostrar un ejemplo en el que GC no luzca muy bien, es decir un caso en el que no quede muy claro cuál es el dibujo realizado.

EJEMPLO 30 Elaborar la gráfica de $\sin(x^2 + y^2 + z^2) = 1/n$ para n entre 1 y 10. Use el vector **rgb**. El código en GC es:

$$\blacksquare \quad \sin(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{n}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x \\ 1 + x \\ z \end{bmatrix}$$


Se trata de una sucesión de esferas concéntricas.

4 Conclusión

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas cuenta hoy con aliados digitales valiosos que debemos aprender a utilizar y a aplicar. La posibilidad de que el estudiante, debidamente orientado, descubra por su cuenta resultados interesantes, abre la puerta de un aprendizaje más ameno y provechoso.

Este trabajo ha evidenciado, mediante ejemplos, las bondades de la herramienta GC y habrá cumplido su cometido, si insta a algún lector a aprender más sobre esta herramienta. El autor queda a disposición de los lectores interesados para colaborar en este proceso.

Referencias

- [1] T. ERICKSON, *Learning Math with Graphing Calculator, Investigating Symbols, Functions, and Graphs*, Pacific Tech, USA, 2002.